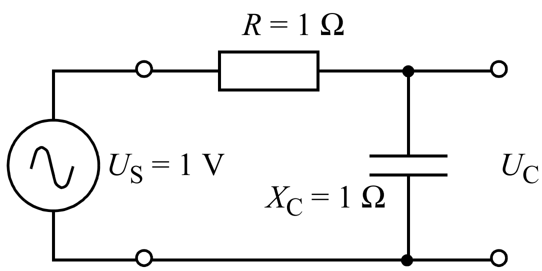
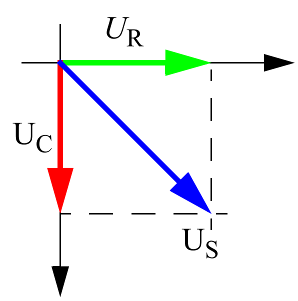
Phaseurs dans un simple circuit RC

Petite introduction aux nombres complexes

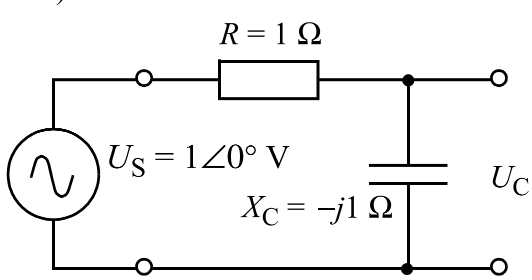
Question. *Lors de l'étude d'un simple circuit RC passe-bas, je suis tombé sur ce diagramme de phaseurs, qui bien qu'il soit évidemment correct, m'interpelle car il suppose que la référence de phase est la tension dans la résistance plutôt que la tension de la source.*

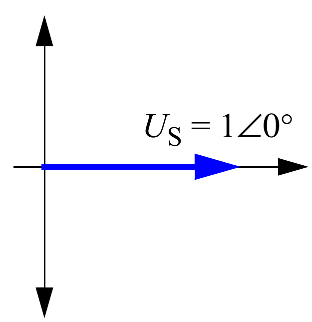
En effet, ce diagramme est parfaitement correct, cependant voyons ce qu'il deviendrait si la référence de phase était la tension de la source. Ce faisant, nous ferons appel aux nombres complexes, pas parce que c'est indispensable, mais afin d'en montrer l'utilité avec un cas extrêmement simple. Commençons par le circuit et le diagramme originaux et choisissons des valeurs simples à utiliser : 1 V pour la source, 1 Ω pour la résistance et 1 Ω pour X_C.





Maintenant, utilisons les valeurs suivantes (qui sont les mêmes que ci-dessus, mais notées différemment).





La tension de la source est de 1 V avec une phase de 0°. Ce sera notre référence de phase, en bleu sur la figure ci-dessus.

L'impédance Z vue par la source est de $(1 - j1)\ \Omega$ soit $1{,}414\angle{-45°}\ \Omega$.

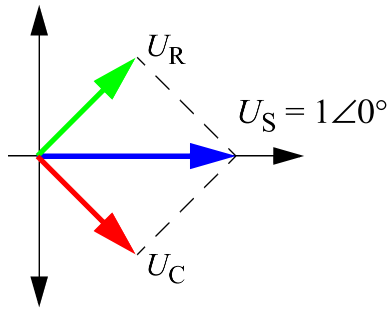
Le courant dans la boucle est alors de : $I = U / Z = 1/(1 - j1) = 0{,}707\angle 45°$ ou $(0{,}5 + j0{,}5)$ A.

Connaissant la valeur des éléments et le courant nous pouvons maintenant calculer les tensions à leurs bornes :

$U_R = I \cdot R = (0{,}5 + j0{,}5) \cdot (1 + j0) = (0{,}5 + j0{,}5)$ V ou $0{,}707\angle 45°$ V.

$U_C = I \cdot X_C = (0{,}5 + j0{,}5) \cdot (0 - j1) = (0{,}5 - j0{,}5)$ V ou $0{,}707\angle{-45°}$ V.

Ces deux phaseurs sont ajoutés sur le graphe ci-dessous.



Conclusion. Ce dernier graphe est identique à celui du début, mais avec une rotation de +45°. Intuitivement, il est plus satisfaisant d'avoir comme référence la tension d'entrée, et de plus, on y voit clairement que la tension de sortie, soit la tension sur le condensateur vaut 0,707 V avec un déphasage de –45°.

Note sur les opérations complexes.

La notation (a + *j*b) est dite **notation rectangulaire** ; la notation x $\angle\theta$ est dite **notation polaire**.

Quasiment toutes les calculettes scientifiques sont capable d'effectuer des conversions polaire vers rectangulaire et réciproquement.

Le symbole *j* vaut $\sqrt{-1}$, donc $j \cdot j = -1$.

Ici, nous avons effectué une opération de multiplication sur deux nombres complexes. Certaines calculettes scientifiques offrent cette fonction, cependant pour les autres, cette opération se fait de la façon suivante :

$(a + jb) \cdot (c + jd) = ac + jad + jcb - bd$ (signe – devant bd puisque $j \cdot j = -1$).

dans le cas ci-dessus :

$(0{,}5 + j0{,}5) \cdot (0 - j1) = 0 - j0{,}5 + 0 + 0{,}5 = (0{,}5 - j0{,}5)$

Nous avons aussi effectué une opération $1 / x$. Ceci se fait en multipliant le numérateur et le dénominateur par le **conjugué complexe** du dénominateur. Le conjugué complexe de (a + *j*b) et (a – *j*b) et celui de (a – *j*b) est (a + *j*b) .

$$\frac{1}{(1-j1)} = \frac{1}{(1-j1)} \cdot \frac{(1+j1)}{(1+j1)} = \frac{(1+j1)}{2} = (0{,}5 + j0{,}5)$$

OP 2026-04-10