

# Résistance dans un circuit oscillant

*Comment une résistance en série avec la bobine affecte-t-elle la fréquence de résonance ?*

Nous savons tous qu'une résistance dans un circuit oscillant LC affecte son facteur Q. Pour ma part, j'ai aussi toujours considéré qu'une résistance ne devrait pas affecter la fréquence de résonance d'un circuit LC. Cependant j'ai récemment été confronté à une formule indiquant que dans certains cas, une résistance peut affecter la fréquence de résonance d'un circuit (R)LC.

Ce document se propose d'explorer ceci, de découvrir comment cette formule et d'autres sont obtenues, et finalement d'effectuer quelques simulations pour vérifier ceci.

Une exploration sur le web fournit ces deux formules (1) qui sont équivalentes :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2C}{L}} \quad (1)$$

En effet :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2C}{L}} \quad (2)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2C}{L^2C} \quad (3)$$

Dans la formule de droite, les C s'annulent et les expressions sont identiques.

Ceci étant fait, examinons la formule de Thomson pour la fréquence de résonance d'un circuit LC. On sait qu'à la fréquence de résonance,  $X_L$  et  $X_C$  :

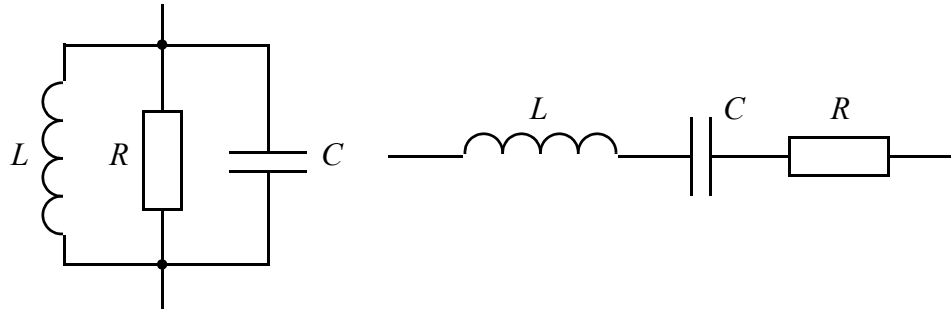
$$2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC} \quad \Rightarrow \quad (2\pi)^2 f^2 LC = 1 \quad (4)$$

donc

$$f^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 LC} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (5)$$

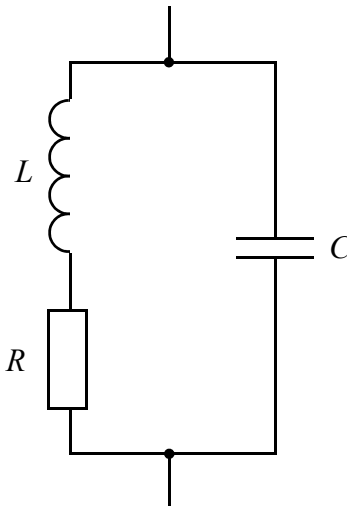
La formule (5) est la formule de Thomson. L'observation importante ici, mise en évidence à la formule (4), est que la réactance d'un tel circuit est nulle car  $X_L$  et  $X_C$  sont égaux et nous le savons de signes opposés.

Examinons maintenant les circuits (R)LC comportant une résistance. Il y a bien entendu les circuits parallèle et série bien connus :



Dans ces deux circuits, la résistance n'affecte pas la fréquence de résonance, car elle n'affecte ni le courant ni la tension dans l'un des autres éléments en particulier.

Il y a plusieurs cas possibles de résistance en parallèle ou en série avec l'un des éléments réactifs, mais l'un d'entre eux est le plus plausible. Examinons ce cas particulier où une résistance est en série avec l'inductance dans un circuit parallèle.



On peut déjà entrevoir une partie du problème si l'on considère que les courants dans les deux branches ne peuvent pas être égaux et opposés à la fréquence prévue par la formule de Thomson.

En effet, les réactances dans chaque branches sont maintenant :

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \quad Z_{RL} = \sqrt{(2\pi f L)^2 + R^2} \quad (6)$$

Utilisons pour déterminer la fréquence de résonance de ce circuit la même méthode que pour l'obtention de la formule de Thomson ci-dessus. Cependant afin de nous affranchir de la complexité de racines carrées, utilisons les nombres complexes, et puisque nous avons affaire à un circuit parallèle, additionnons des admittances ( $Y = G + jB$ ) pour une simplification supplémentaire.

$$Y_C = -j\omega C \quad Y_{RL} = \frac{1}{R + j\omega L} \quad (7)$$

$$Y_{RL} = \frac{1}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (8)$$

En additionnant les deux admittances :

$$Y = j\omega C + \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (9)$$

En regroupant les parts réelles et imaginaires :

$$Y = G + jB = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \left( \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right) \quad (10)$$

La première partie est la partie réelle et la seconde, la partie imaginaire. Comme pour la formule de Thomson, considérons que la résonance est caractérisée par une partie imaginaire nulle :

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0 \quad \text{on peut diviser par } \omega : C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0 \quad (11)$$

$$\text{on sort } C : C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{puis on supprime le dénominateur :} \quad (12)$$

$$CR^2 + C\omega^2 L^2 = L \quad (13)$$

Puis comme au final on s'intéresse à  $f$ , isolons  $\omega^2$  :

$$\omega^2 = \frac{L - CR^2}{CL^2} = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{L^2} \quad (14)$$

$$\text{Maintenant pour } \omega, \text{ puis } f : \omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{L^2}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{L^2}} \quad (15)$$

Cette formule est bien celle proposée sur le web comme indiqué en (1).

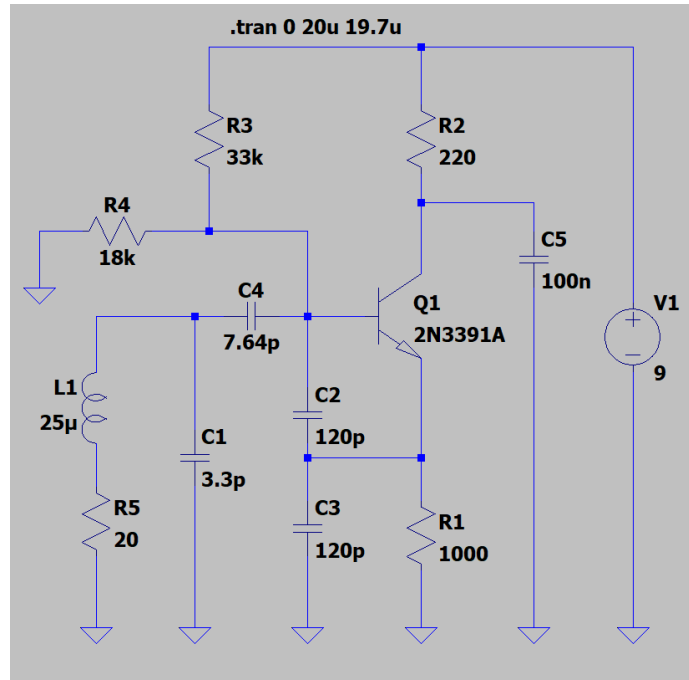
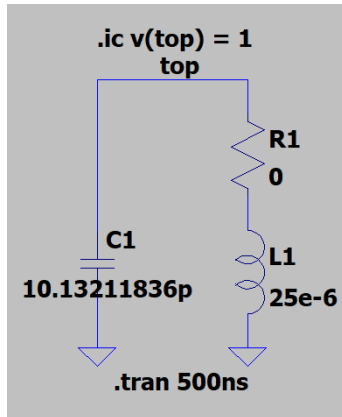
Il y a une autre façon d'envisager le problème, en considérant qu'il suffit que chaque branche  $C$  et  $RL$  ait la même impédance. Ce cas est envisagé ci-dessous.

$$\frac{1}{\omega C} = \sqrt{(\omega L)^2 + R^2} \quad \frac{1}{(\omega C)^2} = (\omega L)^2 + R^2 \quad (16)$$

Il n'est pas simple de résoudre cette équation pour  $\omega$  (ou  $f$ ), mais il est relativement facile d'en trouver la solution à l'aide d'un petit programme itératif. Cela a été fait ci-dessous.

Voyons maintenant sur un graphe quelle est l'importance de la déviation de fréquence en fonction de la résistance en série dans la bobine. Utilisons pour cela un circuit oscillant sur 10 MHz, constitué d'une bobine de 25  $\mu\text{H}$ , et d'un condensateur de 10,13212 pF.

Envisageons le cas d'un simple circuit RLC (à gauche ci-dessous, en variant  $R_1$ ), mis en oscillation au moyen d'une condition initiale, ce qui va provoquer une oscillation plus ou moins amortie en fonction de  $R$ . Puis utilisons un oscillateur complet, ici Colpitts (à droite ci-dessous, en variant  $R_5$ ).



Sur le même graphe, ajoutons les fréquences calculées au moyen de (15), en bleu ci-dessous puis celles calculées au moyen de (16), en vert.

La courbe en orange, est celle obtenue au moyen du circuit RLC, et la courbe en jaune est celle obtenue au moyen de l'oscillateur Colpitts.

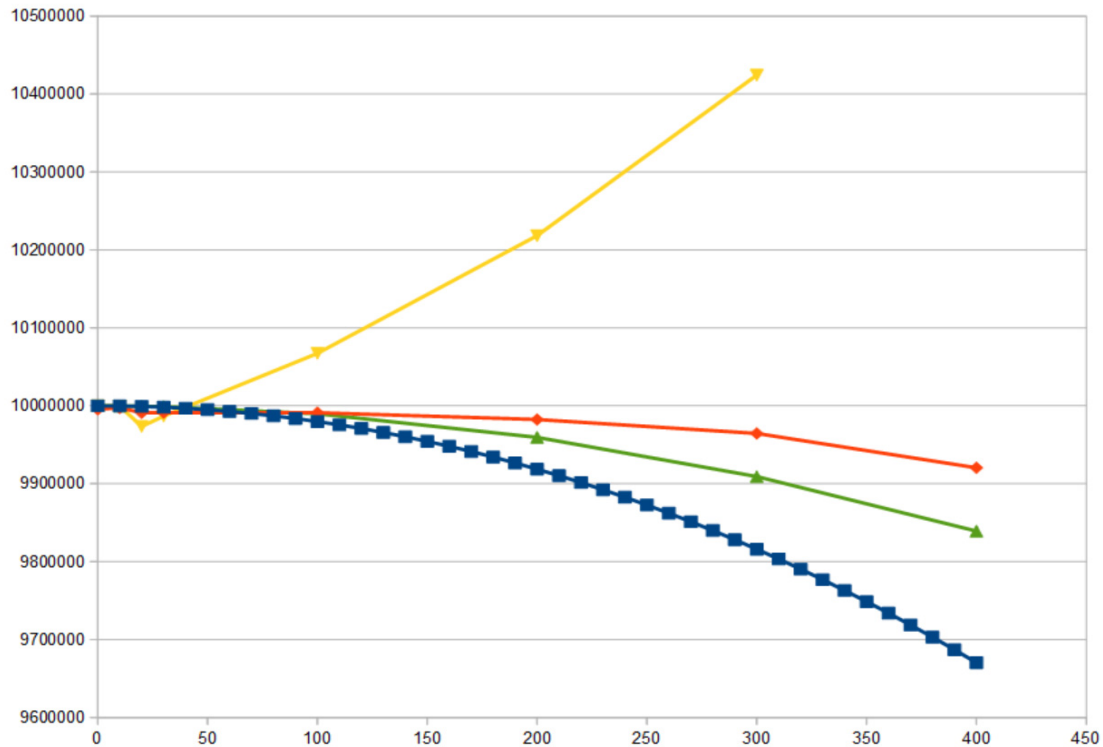
Une première observation est qu'aucune de ces courbes sont identiques.

Il est aisé d'expliquer la divergence de la courbe jaune (circuit Colpitts) par le fait qu'il y a dans ce circuit de nombreux éléments discrets et parasites susceptibles de participer au déphasage requis de  $360^\circ$  pour l'oscillation. Puis pour des valeurs de résistance de plus de 300  $\Omega$ , le circuit n'oscille plus.

Les autres courbes présentent toutes une caractéristique similaire et indiquent effectivement une diminution de la fréquence de résonance en fonction de la valeur de la résistance en série avec la bobine.

La courbe en bleu, selon (1) ou (15) présente la plus forte diminution, diminution qui n'est pas observée dans la pratique (courbe orange).

Le circuit RLC courbe en orange, ne comporte aucun élément parasite susceptible d'affecter la fréquence de résonance théorique. Il est cependant possible que la fréquence finale de résonance soit affectée par une période transitoire après la mise en oscillation initiale. On peut cependant penser qu'une telle erreur serait répétée pour les valeurs successives de la résistance et ne devrait de ce fait que peu affecter cette mesure.



Finalement, la courbe en vert, selon (16), est celle qui s'approche le plus de la courbe bleue, tout en restant proche de la courbe orange. Comme il s'agit de calculs et non du résultat d'une mesure, il est impossible de qualifier sa « justesse » au delà de cette remarque.

## Conclusion

Intuitivement, on peut entrevoir qu'une résistance en série avec la bobine peut affecter la fréquence de résonance.

Les mesures, en pratique, courbe jaune, indiquent que cette variation, en tous cas pour des valeurs « raisonnables » de la résistance série, n'est d'aucune conséquence, puisqu'en pratique de nombreux autres facteurs affectent la fréquence de résonance d'un oscillateur LC.

Le seul effet mesurable, non documenté ici car sommes toutes évident, est un amortissement qui peut être important du circuit (R)LC ainsi constitué.

Cette variation de fréquence restera donc classée parmi les phénomènes sans intérêt pratique, mais ne me permettra plus d'affirmer péremptoirement qu'une résistance ne peut pas affecter la fréquence d'un circuit (R)LC.